VII. Gewöhnliche Differentialgleichungen

VII.1 Terminologie

eine Variable.

gewöhnliche Dgl. (ODE): Gleichung für $y(x)$

allgemein $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$

(„n-te Ordnung")

heißt „linear", falls $y^{(\ell)}$ $(\ell = 0, \ldots, n)$ nur linear in F auftritt.

allgemeine lineare ODE n-ter Ordnung sieht explizit so aus:

$$y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_1(x)\, y'(x) + f_0(x)\, y(x) = f(x)$$

abgekürzt (mit $f_n \equiv 1$): $$\sum_{\ell=0}^{n} f_\ell(x)\, y^{(\ell)}(x) = f(x) \qquad (7.1)$$

oder in „Operator-Form": $(L_n y)(x) = f(x)$ mit

$$L_n = \sum_{\ell=0}^{n} f_\ell(x) (\partial_x)^\ell$$

ODE heißt „regulär", solange die $f_k(x)$ regulär sind, sonst „singulär".

$f(x)$ heißt „Inhomogenität" $\Rightarrow$ (7.1) ist $\begin{cases} \text{inhomogen falls } f \neq 0 \\ \text{homogen falls } f = 0 \end{cases}$

Aussagen über lineare ODEs:

- allg. Lösung von (7.1) ist eine n-parametrige Schar von Funktionen $y_{c_1, c_2, \dots, c_n}(x)$ — Parameter $c_1, c_2, \dots, c_n$
- k Lösungen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ heißen linear unabhängig, wenn $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_k y_k(x) \equiv 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j$
- homogene ODE $L_n y = 0$ hat genau n linear unabhängige Lösungen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.
- Lösungen von $L_n y = 0$ bilden einen n-dimensionalen Vektorraum

Bew: $L_n y_j = 0$ und $L_n y_k = 0 \Rightarrow L_n(\alpha y_j + \beta y_k) = 0$

$\Rightarrow$ Basis $= \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ geeignet gewählt, linear unabhängig.

- <u>allgemeine</u> Lösung der <u>homogenen</u> ODE ist

$$y_{c_1,c_2,\ldots,c_n}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \qquad (7.2)$$

- <u>allgemeine</u> Lösung der <u>inhomogenen</u> ODE ist

$$y_{c_1,c_2,\ldots,c_n}(x) = \underline{y_0(x)} + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \qquad (7.3)$$

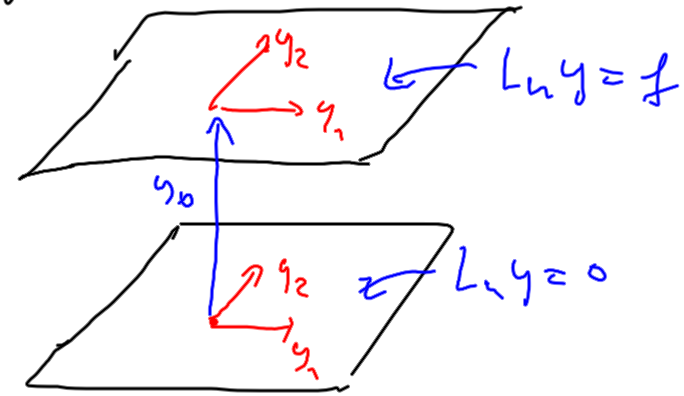
wobei $y_0(x)$ irgendeine <u>spezielle</u> Lösung ist:

$$L_n y_0 = f \quad \text{und} \quad L_n y_{k>0} = 0$$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge von $L_n y = f$ ist <u>kein</u> Vektorraum für $f \neq 0$.

$\Rightarrow$ zu y_0 kann man beliebige homogene Lösungen addieren

$\Rightarrow$ Differenz zweier inhomogene Lösungen ist eine homogene Lösung



VII.2 Zehn Fallbeispiele

① Potenz-Ansatz

$x^2 y'' - 2x y' + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad L_2 = x^2 \partial_x^2 - 2x\partial_x + 2.$

$\#$ Ableitungen $= \#$ x-Potenzen $\Rightarrow$ dim $L_2 = 0$

Ansatz: $y = x^\lambda$ [allgemeiner: Potenzreihen-Ansatz]

eingesetzt, $x^\lambda [\lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2] \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ 2 Basis-Lösungen $\left\{ \begin{matrix} x^1 \\ x^2. \end{matrix} \right.$

allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 x + c_2 x^2$

Test: Einsetzen.

② Variablen-Wechsel

$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ aber auch $x > 0$

inspiriert Wechsel $x = e^t$ weil $x \in (0, \infty] \Leftrightarrow t \in [-\infty, +\infty]$

$y(x) = y(e^t) =: u(t) = u(\ln x)$

$\frac{dx}{dt} = e^t \implies \frac{dt}{dx} = e^{-t}$

$\partial_x = \frac{dt}{dx} \partial_t = e^{-t} \partial_t$

$\partial_x^2 = e^{-t} \partial_t (e^{-t} \partial_t) = e^{-2t} \partial_t^2 - e^{-2t} \partial_t$

$\implies L_2 = e^{2t} \cdot e^{-2t} (\partial_t^2 - \partial_t) - 2e^t \cdot e^{-t} \partial_t + 2$

$= \partial_t^2 - 3\partial_t + 2$ konstante Koeffizienten!

$\Leftrightarrow \ddot{u} - 3\dot{u} + 2u = 0$ Lösung $\rightsquigarrow$ ③

③ Exponential-Ansatz.

$$m\ddot{x} = -\kappa x - R\dot{x} \qquad \kappa, R > 0\ , \quad x \in \mathbb{R}$$

ohne Reibung ($R=0$): Schwingung mit $\omega_0^2 = \frac{\kappa}{m}$

setze $\kappa =: m\omega_0^2$ und $R =: 2m\gamma$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\gamma\dot{x} \iff L_2 x = 0 \text{ mit } L_2 = \partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2$$

Exponential-Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

einsetzen gibt $\quad \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad (*)$

Lösungen: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sigma$ mit $\sigma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

2 Grundlösungen: $x_1 = e^{\lambda_1 t}$, $x_2 = e^{\lambda_2 t}$

allgemeine Lösung für homogene Gleichung:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{\sigma t} + c_2 e^{-\sigma t}\right)$$

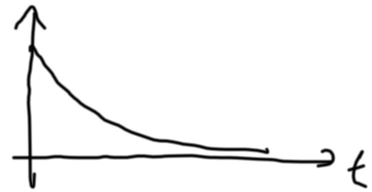
$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \iff$ Anfangsbedingungen.

$\rightsquigarrow$ Exp-Ansatz löst allg. lineare ODE mit konstanten Koeffizienten.

hier: unterscheide 3 Fälle (je nach Lösung von (*))

(a) $\gamma > \omega_0 \Rightarrow \sigma$ reell, $< \gamma \Rightarrow \lambda_{1,2}$ reell, < 0

$\Rightarrow$ abklingende exp-Funktion



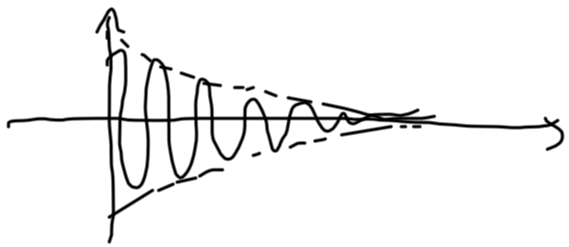
(b) $\gamma < \omega_0 \Rightarrow \sigma = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} =: i\omega \Rightarrow \lambda_1^* = \lambda_2$

$\Rightarrow$ x komplex ??

$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right)$

Euler $\rightarrow$ $= e^{-\gamma t}\left([c_1 + c_2]\cos\omega t + i[c_1 - c_2]\sin\omega t\right)$

Realität von $x \Rightarrow x^* \overset{!}{=} x \Rightarrow c_1 + c_2$ und $i(c_1 - c_2)$ reell.



(c) $\gamma = \omega_0 \Rightarrow \sigma = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$

$\Rightarrow$ nur <u>eine</u> Grundlösung ?? nein!

$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t}(c_1 + c_2 t)$ „aperiodische Grenzfall"

etwas cleverer: $L_2 = (\partial_t + \gamma)^2 + (\omega_0^2 - \gamma^2)$

suggeriert Ansatz: $x(t) = e^{-\gamma t} u(t)$

einsetzen: $(\partial_t + \gamma) e^{-\gamma t} = 0 \Rightarrow (\partial_t + \gamma) x = e^{-\gamma t} \dot{u} \Rightarrow$

$L_2 x = e^{-\gamma t}(\ddot{u} + (\omega_0^2 - \gamma^2) u) = 0 \Rightarrow$

$\ddot{u} + (\omega_0^2 - \gamma^2) u = 0$ kein $\dot{u}$

3 Fälle: (a) $\gamma > \omega_0 \Rightarrow u \sim e^{\pm \sigma t}$

(b) $\gamma < \omega_0 \Rightarrow u \sim e^{\pm i \omega t}$

(c) $\gamma = \omega_0 \Rightarrow u \sim c_1 + c_2 t$.

Vorgezogen für PÜ:

(6) auch für nicht-lineare ODEs:

Trennung der Variablen: $y'(x) = f(x)\, g(y)$

Wir lesen ab: $\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y) \Rightarrow$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$$

nur y → ← nur x

$$\int_{y(x_0)}^{y} \frac{dy'}{g(y')} = \int_{x_0}^{x} dx' f(x') \quad \text{mit } F'(x) = f(x), \quad H'(y) = \frac{1}{g(y)}$$

(7.4)

$$H(y) \overset{!!}{=} F(x) + C_1$$

← Stammfunktionen

Lösungsformel $y(x) = H^{-1}(F(x) + C_1)$ (7.4')

④ Funktionswechsel: $y'(x) + P(x)\,y(x) = Q(x)$

allg. lin. ODE 1. Ordnung: $L_1 = \partial_x + P(x)$, $f(x) = Q(x)$

· suche die eine Grundlösung der homogenen ($Q \equiv 0$) Gleichung: y_1

$$y_1' + P y_1 = 0 \rightsquigarrow \frac{y_1'}{y_1} \equiv \partial_x \ln y_1 = -P \rightsquigarrow \ln y_1 = -\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')$$

$$\rightsquigarrow y_1(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')} \qquad (7.5)$$

· fehlt: eine spezielle Lsg. der inhomog. Gleichung: y_0

Trick: Funktionswechsel von y_0 nach u: $y_0(x) = u(x) \cdot y_1(x)$

einsetzen: $u' y_1 + \underline{u y_1'} + \underline{P u y_1} = Q$, aber: $y_1' + P y_1 = 0 \rightsquigarrow$

$$u' = Q/y_1 \rightsquigarrow u(x) = \int_{x_1}^{x} dx' \frac{Q(x')}{y_1(x')} \rightsquigarrow$$

$$y_0(x) = y_1(x) \cdot \int_{x_1}^{x} dx' \frac{Q(x')}{y_1(x')}$$ inhomogene Lösung (7.6)

Lösungsformel:

$$y(x) = y_0 + c_1 y_1 = e^{-\int_{x_1}^{x} dx'\, P(x')} \left(c_1 + \int_{x_0}^{x} dx'\, Q(x')\, e^{+\int_{x_1}^{x'} dx''\, P(x'')} \right)$$

$$= y_1 (c_1 + u) \qquad (7.7)$$

(5) Variation der Konstanten:

$$y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = f(x)$$

allg. lin. ODE 2. Ordnung: $L_2 = \partial_x^2 + a\partial_x + b$

homog. Gleichung hat 2 Grundlösungen, $\nexists$ allg. Methode

falls (!) eine Grundlösung y_1 bekannt, dann $\exists$ Strategie:

neue Funktion u über: $y(x) =: u(x)\cdot y_1(x)$

also: $y' = y_1'u + y_1u'$, $y'' = y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''$

einsetzen: $y_1u'' + 2y_1'u' + \underline{y_1''u} + ay_1u' + \underline{ay_1'u} + \underline{by_1u} = f$

addiert zu 0 wegen $L_2y_1 = 0$

$\rightsquigarrow y_1u'' + (2y_1' + ay_1)u' = f$ keine u-Terme mehr!

definiere $v := u'$ $\rightsquigarrow$ $v' + \left(a + 2\frac{y_1'}{y_1}\right)\cdot v = \frac{f}{y_1}$ $\curvearrowright$ zurück zu (4) ✓

Bspi $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ erlaubt $x_1(t) = e^{i\omega t}$

Ansatz: $x = e^{i\omega t} \cdot u(t)$

einsetzen: $e^{i\omega t}\left(\ddot{u} + 2i\omega \dot{u} - \cancel{\omega^2 u} + \cancel{\omega^2 u}\right) = f$

$\dot{u} = v \rightsquigarrow \quad \dot{v} + 2i\omega v = f e^{-i\omega t}$

$\overset{(7.7)}{\rightsquigarrow} \quad v(t) = \ldots \rightsquigarrow \quad u(t) = \ldots$

vollst. Lösung:

$$x(t) = e^{i\omega t}\left[c_2 + \int_0^t dt'\, e^{-2i\omega t'}\left(c_1 + \int_0^{t'} dt''\, f(t'')\, e^{-i\omega t''}\right)\right] \qquad (7.8)$$

Bemerkungen

1) für $f \equiv 0$ (homogen) und y_1 bekannt:

$$v = e^{-\int_{x_1}^{x} dx' \left[a + 2\partial_{x'} \ln y_1\right]} = \left(\frac{y_1(x)}{y_1(x_1)}\right)^{-2} e^{-\int_{x_1}^{x} dx'\, a(x')} \rightsquigarrow y_2 \rightsquigarrow y(x)$$

2) für L_n statt L_2 und y_1 bekannt

dieses Verfahren reduziert $L_n \to L_{n-1}$

7 Reduktion der Ordnung

a) $y'' = f(y, y')$ $\quad$ x kommt nicht in f vor!

Trick: betrachte y' als Funktion von y

$y' =: p(y) \rightsquigarrow y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p' \cdot y' = p' \cdot p$

einsetzen: $p' p = f(y, p)$ $\quad$ ODE 1. Ordng für $p(y)$

falls die gelöst, komme zurück zu $y(x)$ mit $y' = p(y)$; $\quad$ Fall 6 ✓

b) $y'' = f(x, y')$ $\quad$ y kommt nicht in f vor!

Trick: nehme $y' =: u$ als neue Fktn

$\rightsquigarrow u' = f(x, u) \rightsquigarrow$ ODE 1. Ordng für $u(x)$ ✓

c) $Ly = f$ mit $L = L_1 \cdot L_2$ Produktstruktur

Trick: $L_1 L_2 y = L_1 u = f$ mit $L_2 y =: u$

$\rightarrow$ 2 ODEs 1. Ordnung: löse erst für u, dann für y

8 Umwandlung in ODE-System

ODE n-ter Ordnung $\longrightarrow$ System von n ODEs 1. Ordnung

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, x\right)$$

definiere:

$$\left.\begin{aligned} y' &=: u_1 \\ y'' &=: u_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &=: u_{n-1} \\ y^{(n)} &= f(\dots) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} y' &= u_1 \\ u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\vdots \\ u_{n-2}' &= u_{n-1} \\ u_{n-1}' &= f(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_1, y, x) \end{aligned}\right\}$$

falls linear, d.h. $f = a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y + a(x)$

dann von Matrix-Form: $\underline{Y}' = A \cdot \underline{Y} + \underline{F}$ mit

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} y \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \underset{P(x)}{\underset{\updownarrow}{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \underset{Q(x)}{\underset{\updownarrow}{\underline{F}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

Matrix-wertige Verallg. von 4

Illustration: <u>$n=2$</u> linear $\rightsquigarrow$ allg. lineare ODE 2. Ordnung

$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = f(t) \qquad \text{def.: } \dot{x} = v$$

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dot{\underline{Y}} \underset{*}{=} A(t)\,\underline{Y} + F(t)$$

(7.10a)

erst die homogene Gl., d.h. $F \equiv 0$

Def.: Zeitentwicklungsmatrix $\mathcal{U}(t,t_0)$

(7.10b) $\underline{Y}(t) = \mathcal{U}(t,t_0)\,\underline{Y}(t_0)$ für AW $\underline{Y}(t_0) = \underline{Y}_0$

ODE $\rightsquigarrow$ $\dot{Y} = \dot{\mathcal{U}}\,Y_0 \overset{*}{=} A\,\mathcal{U}\,Y_0 = A\,Y \rightsquigarrow \dot{\mathcal{U}} = A \cdot \mathcal{U}$

AW $\mathcal{U}(t_0,t_0) = \mathbb{1}$ (7.10c)

dann inhomog. Gl., also $F \neq 0$

Ansatz: $Y = \mathcal{U} \cdot Z$ (Z statt Y_0, „Variation der Konstanten")

ODE $\rightsquigarrow$ $\dot{Y} = \dot{\mathcal{U}} Z + \mathcal{U}\dot{Z} = A\underbrace{\mathcal{U}Z}_{Y} + \mathcal{U}\dot{Z} \overset{*}{=} AY + F \rightsquigarrow$

$\rightarrow \mathcal{U}\dot{Z} = F \rightarrow \dot{Z} = \mathcal{U}^{-1}F \rightsquigarrow Z(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} dt'\, \mathcal{U}(t',t_0)^{-1} F(t')$

(7.10d)

Vorsicht: für $n=1$ ist $U(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} dt'\, A(t')}$

für $n>1$ ist dies falsch

weil $[A(t_1), A(t_2)] \neq 0$

Im Spezialfall konstanter Koeffizienten, d.h. $A(t) = A = \text{konst.}$

ist Lösung möglich:

$$U(t,t_0) = e^{(t-t_0)\cdot A} := \mathbb{1} + (t-t_0)A + \frac{1}{2!}(t-t_0)^2 A^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(t-t_0)^n A^n \qquad (7.11)$$

<u>Bsp</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$+ \frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^4}{4!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{Drehmatrix!}$$

inhomog. Lsg. in diesem Fall:

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}\left[Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt'\, e^{-(t'-t_0)A} F(t')\right] \qquad (7.12)$$

9 & 10 weglassen ...

ENDE